JU OŠ „Milorad Musa Burzan“ – Podgorica

Analiza I pismenog zadatka

Djeljivost brojeva · NZD i NZS – VI razred

Grupa A i *Grupa B*



Šta smo provjeravali na pismenom?

- **1. zadatak** – pravila djeljivosti, nepoznate cifre (ispitivanje svih slučajeva)
- **2. zadatak** – NZD i NZS tri broja; djeljivost trocifrenog broja
- **3. zadatak** – izrazi sa NZD i NZS; NZD i NZS brojeva datih kao proizvod prostih činilaca
- **4. zadatak** – tekstualni zadatak: primjena NZD
- **5. zadatak** – trocifreni brojevi sa uslovima za cifre

Zadatak	Bodovi	Dijelovi
1.	20	5 + 10 + 5
2.	20	10 + 10
3.	25	10 + 15
4.	20	
5.	15	
Ukupno	**100**	

0–24 (1) · 25–49 (2) · 50–69 (3)
70–89 (4) · 90–100 (5)

Podsjetnik: pravila djeljivosti

Broj je djeljiv sa	ako...
2	posljednja cifra je parna
3	zbir cifara je djeljiv sa 3
4	posljednje dvije cifre čine broj djeljiv sa 4
5	posljednja cifra je 0 ili 5
9	zbir cifara je djeljiv sa 9
10	posljednja cifra je 0
25	posljednje dvije cifre su 00, 25, 50 ili 75

Složeni djelioci

Broj je djeljiv složenim brojem ako je djeljiv sa oba **uzajamno prosta** činioca:

$6 = 2 \cdot 3$ $\quad$ $12 = 3 \cdot 4$

$15 = 3 \cdot 5$ $\quad$ $18 = 2 \cdot 9$

Pažnja: $12 = 2 \cdot 6$ **nije** dobro rastavljanje za ispitivanje djeljivosti, jer 2 i 6 nisu uzajamno prosti (broj 18 je djeljiv sa 2 i sa 6, ali nije sa 12)!

Podsjetnik: NZD preko šeme

1. Brojeve napišemo u jedan red i desno od njih povučemo **vertikalnu crtu**.
2. Desno od crte pišemo **prost broj koji dijeli SVE brojeve** (počinjemo od najmanjeg: 2, 3, 5, 7, …).
3. Svaki broj podijelimo tim prostim brojem i količnike pišemo u sljedeći red.
4. Postupak ponavljamo dok postoji prost broj koji dijeli **sve** brojeve u redu.
5. **NZD** je proizvod svih brojeva desno od crte.

Primjer: NZD(24, 36, 60)

24	36	60	**2**
12	18	30	**2**
6	9	15	**3**
2	3	5	

$$\mathrm{NZD}(24, 36, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{12}$$

Brojevi 2, 3, 5 nemaju zajednički djelilac → stajemo.

Podsjetnik: NZS preko šeme

1. Brojeve napišemo u red i povučemo vertikalnu crtu.
2. Desno pišemo **prost broj koji dijeli BAR JEDAN broj** u redu.
3. Brojeve koji su djeljivi tim brojem podijelimo, a one koji **nisu djeljivi samo prepišemo** (sivi brojevi).
4. Nastavljamo dok **svi** brojevi ne postanu 1.
5. **NZS** je proizvod svih brojeva desno od crte.

Razlika: kod NZD dijelimo samo kad prost broj dijeli **sve** brojeve; kod NZS dovoljno je da dijeli **bar jedan**.

Primjer: NZS(24, 36, 60)

24	36	60	2
12	18	30	2
6	9	15	2
3	9	15	3
1	3	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

$$\text{NZS}(24, 36, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{360}$$

Grupa A

A1. a) $25 \mid \overline{46b0}$ i c) $9 \mid \overline{83a5}$ (5 + 5 bodova)

a) $25 \mid \overline{46b0}$

Broj je djeljiv sa 25 ako su mu posljednje dvije cifre **00, 25, 50 ili 75**.

Posljednje dvije cifre su $\overline{b0}$ – završavaju se nulom, pa dolaze u obzir samo **00** i **50**.

$b = 0 \Rightarrow 4600 \qquad b = 5 \Rightarrow 4650$

$b \in \{0, 5\}$

c) $9 \mid \overline{83a5}$

Broj je djeljiv sa 9 ako mu je **zbir cifara** djeljiv sa 9.

$8 + 3 + a + 5 = 16 + a$

a je cifra ($0 \leq a \leq 9$), pa je $16 \leq 16 + a \leq 25$. Jedini broj djeljiv sa 9 u tom intervalu je 18:

$16 + a = 18 \Rightarrow a = 2$ → 8325

Uvijek napiši i **dobijeni broj** i provjeri ga: $4650 : 25 = 186,\ 8325 : 9 = 925$.

$12 = 3 \cdot 4$ (3 i 4 su uzajamno prosti), pa broj mora biti djeljiv **i sa 4 i sa 3**.

Korak 1 – djeljivost sa 4: posljednje dvije cifre $\overline{4b}$ moraju činiti broj djeljiv sa 4:
$40,\ 44,\ 48 \Rightarrow b \in \{0, 4, 8\}$

Korak 2 – djeljivost sa 3: zbir cifara $7 + a + 4 + b = 11 + a + b$ mora biti djeljiv sa 3. Za svako b ispitujemo posebno:

b	zbir	a	brojevi
0	$11 + a$	1, 4, 7	7140, 7440, 7740
4	$15 + a$	0, 3, 6, 9	7044, 7344, 7644, 7944
8	$19 + a$	2, 5, 8	7248, 7548, 7848

Ukupno 10 brojeva.

Najčešća greška: učenik nađe samo jedan broj. Tekst kaže **„ispitaj svaki slučaj“** – moraju se naći svi!

A2. a) Koliko puta je $\mathrm{NZS}(24, 36, 60)$ veći od NZD? (10 bodova)

NZD – dijelimo samo kad dijeli SVE

24	36	60	2
12	18	30	2
6	9	15	3
2	3	5	

$$\mathrm{NZD}(24, 36, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{12}$$

NZS – dijelimo dok svi ne budu 1

24	36	60	2
12	18	30	2
6	9	15	2
3	9	15	3
1	3	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

$$\mathrm{NZS}(24, 36, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{360}$$

Pitanje „koliko puta je veći“ rješavamo **dijeljenjem**:

$$360 : 12 = 30$$

NZS je 30 puta veći od NZD.

„Koliko puta veći“ → dijeljenje;
„za koliko veći/manji“ → oduzimanje.

A2. b) Najmanji trocifreni broj čija je prva cifra 6, djeljiv sa 18 (10 bodova)

Trocifreni brojevi čija je prva cifra 6 su **od 600 do 699**.

Način 1 – dijeljenjem:
$600 : 18 = 33$, ostatak 6 $(18 \cdot 33 = 594)$.
Sljedeći sadržalac broja 18 je $18 \cdot 34 = \mathbf{612}$.

Način 2 – pravilima djeljivosti: $18 = 2 \cdot 9$
Broj mora biti paran i imati zbir cifara djeljiv sa 9:
600 (zbir 6), 602 (8), 604 (10), ..., **612** (zbir 9 ✓, paran ✓)

Provjera

$$612 : 18 = 34 \ \checkmark$$

$$612 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17$$

Prvi broj 600 nije djeljiv sa 18 (zbir cifara je 6). Ne smijemo napisati 600 samo zato što je „najmanji“!

A3. a) $\mathrm{NZS}(15, \mathrm{NZD}(18, 45)) + \mathrm{NZS}(\mathrm{NZD}(26, 39), 4)$ (10 bodova)

Računamo **iznutra ka spolja**: prvo NZD u zagradama, pa NZS, pa zbir.

1) NZD(18, 45)

18	45	3
6	15	3
2	5	

$\mathrm{NZD}(18, 45) = 3 \cdot 3 = \mathbf{9}$

2) NZS(15, 9)

15	9	3
5	3	3
5	1	5
1	1	

$\mathrm{NZS}(15, 9) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{45}$

3) NZD(26, 39)

26	39	13
2	3	

$\mathrm{NZD}(26, 39) = 13 = \mathbf{13}$

4) NZS(13, 4)

13	4	2
13	2	2
13	1	13
1	1	

$\mathrm{NZS}(13, 4) = 2 \cdot 2 \cdot 13 = \mathbf{52}$

$$\mathrm{NZS}(15, \mathbf{9}) + \mathrm{NZS}(\mathbf{13}, 4) = 45 + 52 = \mathbf{97}$$

A3. b) NZD i NZS brojeva datih preko prostih činilaca (15 bodova)

$$m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2 \qquad n = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$$

Brojevi su već rastavljeni, pa šemu ne pravimo – čitamo **izložioce** svakog prostog činioca:

prost činilac	2	3	5	13
izložilac u m	3	2	1	2
izložilac u n	1	3	2	1
NZD – manji izložilac	1	2	1	1
NZS – veći izložilac	3	3	2	2

$$\mathrm{NZD}(m,n) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = \mathbf{1170} \qquad \mathrm{NZS}(m,n) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 = \mathbf{912\,600}$$

A4. Četiri žice: 42 m, 70 m, 98 m i 126 m (20 bodova)

Zašto NZD? Svaka žica se mora isjeći na jednake djelove **bez ostatka**, pa dužina dijela mora **dijeliti** sve četiri dužine. Tražimo **najveću** takvu dužinu → **najveći zajednički djelilac**.

Dužina jednog dijela: **14 m**

Broj djelova: svaku dužinu dijelimo sa 14:
$42 : 14 = 3,\ 70 : 14 = 5,\ 98 : 14 = 7,$
$126 : 14 = 9$
$3 + 5 + 7 + 9 =$ **24 dijela**

Zgodno: brojevi u posljednjem redu šeme (3, 5, 7, 9) su upravo brojevi djelova svake žice!

NZD(42, 70, 98, 126)

42	70	98	126	2
21	35	49	63	7
3	5	7	9	

$\mathrm{NZD}(42, 70, 98, 126) = 2 \cdot 7 = \mathbf{14}$

3, 5, 7, 9 nemaju zajednički djelilac → stajemo.

A5. Trocifreni brojevi djeljivi sa 15, oblika $\overline{aba}$, $b > a$ (15 bodova)

Cifra stotina i cifra jedinica su jednake → broj je oblika $\overline{aba}$, a cifra desetica je veća: $b > a$.

$15 = 3 \cdot 5$ → broj mora biti djeljiv **sa 5 i sa 3**.

Sa 5: posljednja cifra je 0 ili 5. Ali posljednja cifra je ista kao prva, a prva cifra trocifrenog broja **ne može biti 0** → $a = 5$.

Broj je $\overline{5b5}$, a $b > 5$ → $b \in \{6, 7, 8, 9\}$.

Sa 3: $5 + b + 5 = 10 + b$ djeljivo sa 3 → $b \in \{2, 5, 8\}$.

Oba uslova ispunjava samo $b = 8$ → **585**.

b	zbir $10 + b$	djeljiv sa 3?
6	16	ne
7	17	ne
8	**18**	**da**
9	19	ne

Provjera

$585 : 15 = 39$ ✓

Grupa B

B1. a) $4 \mid \overline{82b4}$ i c) $3 \mid \overline{48a1}$ (5 + 5 bodova)

a) $4 \mid \overline{82b4}$

Broj je djeljiv sa 4 ako posljednje dvije cifre čine broj djeljiv sa 4.

Posljednje dvije cifre su $\overline{b4}$: ispitujemo 04, 14, 24, ..., 94.

Djeljivi sa 4 su: **04, 24, 44, 64, 84**.

$b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ → 8204, 8224, 8244, 8264, 8284

c) $3 \mid \overline{48a1}$

Broj je djeljiv sa 3 ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3.

$4 + 8 + a + 1 = 13 + a$

$13 \leq 13 + a \leq 22$ → djeljivi sa 3 su 15, 18, 21:

$a = 2,\ 5,\ 8$

$a \in \{2, 5, 8\}$ → 4821, 4851, 4881

B1. b) $15 \mid \overline{6a2b}$ (10 bodova)

$15 = 3 \cdot 5$ → broj mora biti djeljiv **i sa 5 i sa 3**.

Korak 1 – djeljivost sa 5: posljednja cifra je 0 ili 5 → $b \in \{0, 5\}$.

Korak 2 – djeljivost sa 3: zbir cifara $6 + a + 2 + b = 8 + a + b$ mora biti djeljiv sa 3. Ispitujemo oba slučaja:

b	zbir	a	brojevi
0	$8 + a$	1, 4, 7	6120, 6420, 6720
5	$13 + a$	2, 5, 8	6225, 6525, 6825

Ukupno 6 brojeva.

Provjeri jedan od brojeva: $6525 : 15 = 435$ ✓

B2. a) Za koliko je $\mathrm{NZD}(36, 54, 90)$ manji od NZS? (10 bodova)

NZD – dijelimo samo kad dijeli SVE

36	54	90	2
18	27	45	3
6	9	15	3
2	3	5	

$$\mathrm{NZD}(36, 54, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{18}$$

NZS – dijelimo dok svi ne budu 1

36	54	90	2
18	27	45	2
9	27	45	3
3	9	15	3
1	3	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

$$\mathrm{NZS}(36, 54, 90) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{540}$$

Pitanje „za koliko je manji“ rješavamo **oduzimanjem**:

$$540 - 18 = 522$$

NZD je za 522 manji od NZS.

„Za koliko manji“ → oduzimanje;
„koliko puta manji“ → dijeljenje.

B2. b) Najmanji trocifreni broj čija je prva cifra 8, djeljiv sa 6 (10 bodova)

Trocifreni brojevi čija je prva cifra 8 su **od 800 do 899**.

Način 1 – dijeljenjem:
$800 : 6 = 133$, ostatak 2 $(6 \cdot 133 = 798)$.
Sljedeći sadržalac broja 6 je $6 \cdot 134 = \mathbf{804}$.

Način 2 – pravilima djeljivosti: $6 = 2 \cdot 3$
Broj mora biti paran i imati zbir cifara djeljiv sa 3:
800 (zbir 8), 802 (zbir 10), **804** (zbir 12 ✓, paran ✓)

Provjera

$804 : 6 = 134$ ✓

800 je paran, ali zbir cifara mu je 8 – nije djeljiv sa 3, pa ni sa 6.

B3. a) $\mathrm{NZS}(10, \mathrm{NZD}(28, 42)) + \mathrm{NZS}(\mathrm{NZD}(45, 75), 9)$ (10 bodova)

Računamo **iznutra ka spolja**: prvo NZD u zagradama, pa NZS, pa zbir.

1) NZD(28, 42)

28	42	2
14	21	7
2	3	

$\mathrm{NZD}(28, 42) = 2 \cdot 7 = \mathbf{14}$

2) NZS(10, 14)

10	14	2
5	7	5
1	7	7
1	1	

$\mathrm{NZS}(10, 14) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{70}$

3) NZD(45, 75)

45	75	3
15	25	5
3	5	

$\mathrm{NZD}(45, 75) = 3 \cdot 5 = \mathbf{15}$

4) NZS(15, 9)

15	9	3
5	3	3
5	1	5
1	1	

$\mathrm{NZS}(15, 9) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{45}$

$$\mathrm{NZS}(10, \mathbf{14}) + \mathrm{NZS}(\mathbf{15}, 9) = 70 + 45 = \mathbf{115}$$

B3. b) NZD i NZS brojeva datih preko prostih činilaca (15 bodova)

$$m = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \qquad n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$$

Šemu ne pravimo – upoređujemo **izložioce**. Ako činilac nema u jednom broju, izložilac je 0 ($11^0 = 1$):

prost činilac	2	3	5	7	11
izložilac u m	4	1	3	1	0
izložilac u n	2	2	1	2	1
NZD – manji izložilac	2	1	1	1	0
NZS – veći izložilac	4	2	3	2	1

$\mathrm{NZD}(m,n) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{420}$ $\qquad$ $\mathrm{NZS}(m,n) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = \mathbf{9\,702\,000}$

B4. Cvjećarka: 74 ruže, 115 lala, 94 karanfila (20 bodova)

Korak 1 – šta ide u bukete? Cvjećarka zadržava 2 ruže, 7 lala i 4 karanfila:
$74 - 2 = 72$ ruže, $115 - 7 = 108$ lala,
$94 - 4 = 90$ karanfila

Korak 2 – zašto NZD? Svaki cvijet mora biti raspoređen, a svi buketi isti → broj buketa **dijeli** 72, 108 i 90. Tražimo **najveći** broj buketa → **NZD**.

Najviše **18 buketa**.

U jednom buketu: **4 ruže, 6 lala, 5 karanfila**.

Česta greška: računanje NZD od 74, 115 i 94 – prvo se moraju oduzeti cvjetovi koje cvjećarka zadržava!

NZD(72, 108, 90)

72	108	90	2
36	54	45	3
12	18	15	3
4	6	5	

$$\mathrm{NZD}(72, 108, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{18}$$

Posljednji red (4, 6, 5) = broj cvjetova svake vrste u buketu!

B5. Trocifreni brojevi djeljivi sa 18, oblika $\overline{aba}$, $b < a$ (15 bodova)

Broj je oblika $\overline{aba}$, a cifra desetica je manja: $b < a$.

$18 = 2 \cdot 9$ → broj mora biti djeljiv **sa 2 i sa 9**.

Sa 2: posljednja cifra a je parna, a $a \neq 0$ (prva cifra) → $a \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Sa 9: zbir cifara $a + b + a = 2a + b$ djeljiv sa 9.

Za svako a tražimo cifru b i provjeravamo uslov $b < a$ (tabela desno).

Traženi brojevi: **414 i 828**.

a	$2a + b$	b	$b < a$?
2	$4 + b = 9$	5	ne
4	$8 + b = 9$	1	**da** → 414
6	$12 + b = 18$	6	ne ($b = a$)
8	$16 + b = 18$	2	**da** → 828

Provjera

$414 : 18 = 23$ ✓ $828 : 18 = 46$ ✓

Najčešće greške i savjeti

Česte greške

- Nađen samo jedan broj kada se traže **svi slučajevi**.
- 12 rastavljeno kao $2 \cdot 6$ umjesto $3 \cdot 4$.
- Kod NZD dijeljenje brojem koji **ne dijeli sve** brojeve.
- Kod NZS zaboravljeno prepisivanje brojeva koji nisu djeljivi.
- Zamjena „koliko puta“ (dijeljenje) i „za koliko“ (oduzimanje).
- U tekstualnom zadatku nije oduzeto ono što se zadržava.
- Za prvu cifru uzeta 0.

Savjeti

- U šemi dijeli redom: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- NZD – stani kad nema **zajedničkog** djelioca.
  NZS – stani kad su **svi** brojevi 1.
- Uvijek provjeri: NZS mora biti djeljiv svim brojevima, a NZD mora dijeliti sve brojeve.
- U tekstualnom zadatku napiši **zašto** koristiš NZD ili NZS.
- Na kraju napiši **odgovor rečenicom**.

Bravo za trud!

Greške su tu da bismo iz njih učili.

