

MNOGOUGAO

Priprema za kontrolni zadatak

MATEMATIKA · IX RAZRED

Podsjetnik: formule

Bilo koji mnogougao sa n stranica

Dijagonale iz jednog tjemena:
$d_n = n - 3$

Ukupan broj dijagonala:
$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Zbir unutrašnjih uglova:
$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$

Zbir spoljašnjih uglova: 360°

Pravilan mnogougao

Unutrašnji ugao:
$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$

Spoljašnji ugao: $\alpha_1 = \frac{360^\circ}{n}$

Veza: $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$

Obim: $O = n \cdot a$

Zadatak 1 — 20 b

Izračunaj d_n, D_n, S_n, α, α_1 i O pravilnog **30-ougla**, ako je dužina njegove stranice $a = 3$ cm.

Zadatak 1 — rješenje

$n = 30, \quad a = 3$ cm

$$d_n = n - 3 = \mathbf{27}$$

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{30 \cdot 27}{2} = \mathbf{405}$$

$$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ = 28 \cdot 180^\circ = \mathbf{5040}^\circ$$

Provjera: $\alpha + \alpha_1 = 168^\circ + 12^\circ = 180^\circ$ ✓

$$\alpha = \frac{S_n}{n} = \frac{5040^\circ}{30} = \mathbf{168}^\circ$$

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{30} = \mathbf{12}^\circ$$

$$O = n \cdot a = 30 \cdot 3 = \mathbf{90} \text{ cm}$$

Zadatak 2 a) — 10 b

Da li ovi uglovi

$$121^\circ, \quad 108^\circ, \quad 93^\circ, \quad 72^\circ, \quad 140^\circ, \quad 126^\circ$$

mogu biti unutrašnji uglovi nekog **šestougla**? *(Objasni!)*

Zadatak 2 a) — rješenje

Za šestougao je $S_6 = (6-2) \cdot 180^\circ = \mathbf{720}^\circ$.

Zbir datih uglova:

$$121^\circ + 108^\circ + 93^\circ + 72^\circ + 140^\circ + 126^\circ = \mathbf{660}^\circ$$

Kako je $660^\circ \neq 720^\circ$, **ne mogu** biti unutrašnji uglovi šestougla (nedostaje 60°).

Zadatak 2 b) — 15 b

Izračunaj unutrašnje uglove **petougla** ako je svaki ugao za 10° veći od prethodnog.

Zadatak 2 b) — rješenje

Neka je najmanji ugao x. Uglovi su:

$$x, \quad x+10^\circ, \quad x+20^\circ, \quad x+30^\circ, \quad x+40^\circ$$

Zbir uglova petougla: $S_5 = (5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$

$$\begin{aligned} 5x + 100^\circ &= 540^\circ \\ 5x &= 440^\circ \\ x &= \mathbf{88}^\circ \end{aligned}$$

Uglovi su: $\mathbf{88}^\circ$, $\mathbf{98}^\circ$, $\mathbf{108}^\circ$, $\mathbf{118}^\circ$, $\mathbf{128}^\circ$ (provjera: zbir $= 540^\circ$ ✓)

Zadatak 3 — 15 b

Objasni značenje oznake S_{10}, pa izračunaj tu vrijednost.

Zadatak 3 — rješenje

S_{10} je **zbir unutrašnjih uglova desetougla** (mnogougla sa 10 stranica).

$$S_{10} = (10-2)\cdot 180^\circ = 8\cdot 180^\circ = \mathbf{1440}^\circ$$

Objašnjenje: dijagonale iz jednog tjemena dijele desetougao na $10-2=8$ trouglova, a svaki trougao ima zbir uglova 180°.

Zadatak 4 — 20 b

Postoji li mnogougao koji ima **90 dijagonala**? *(Objasni!)*

Zadatak 4 — rješenje

$$\frac{n(n-3)}{2} = 90$$

$$n^2 - 3n = 180$$

$$n^2 - 3n - 180 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 720}}{2} = \frac{3 \pm 27}{2} \implies n_1 = \mathbf{15}, \qquad n_2 = -12 \text{ (odbacuje se)}$$

Da — to je **petnaestougao**. Provjera: $\frac{15 \cdot 12}{2} = 90$ ✓

Zadatak 5 — 20 b

Odredi S_n ako je broj dijagonala mnogougla **osamnaest puta veći** od broja dijagonala iz jednog tjemena.

Zadatak 5 — rješenje

Uslov: $D_n = 18 \cdot d_n$

$$\frac{n(n-3)}{2} = 18\,(n-3) \qquad \big/ : (n-3), \quad n > 3$$

$$\frac{n}{2} = 18$$

$$n = \mathbf{36}$$

$$S_n = (36-2) \cdot 180^\circ = 34 \cdot 180^\circ = \mathbf{6120}^\circ$$

Dodatni zadatak — 30 b

Rješenje jednačine

$$(4a-1)^2-(4a+1)(4a-1)=-38$$

je dužina stranice pravilnog mnogougla izražena u cm. Ako je obim mnogougla $O=60$ cm, odredi **odnos unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla** tog mnogougla.

Dodatni zadatak — rješenje

1) Riješimo jednačinu:

$$(4a-1)^2-(4a+1)(4a-1)=16a^2-8a+1-(16a^2-1)=-8a+2$$

$$-8a+2=-38 \implies a=\mathbf{5}\ \text{cm}$$

2) Broj stranica: $n=\dfrac{O}{a}=\dfrac{60}{5}=\mathbf{12}$

3) Uglovi: $\alpha=\dfrac{(12-2)\cdot 180^\circ}{12}=\mathbf{150}^\circ,\qquad \alpha_1=\dfrac{360^\circ}{12}=\mathbf{30}^\circ$

Odnos: $\alpha:\alpha_1=150^\circ:30^\circ=\mathbf{5}:\mathbf{1}$

Teži zadatak 1

Broj dijagonala mnogougla je za **25 veći** od broja njegovih stranica. Koliko stranica ima taj mnogougao?

Teži zadatak 1

Broj dijagonala mnogougla je za **25 veći** od broja njegovih stranica. Koliko stranica ima taj mnogougao?

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 25 \quad / \cdot 2 \implies n(n-3) = 2n + 50$$

$$n^2 - 3n = 2n + 50 \implies n^2 - 5n = 50 \implies \boxed{n\,(n-5) = 50}$$

Tražimo dva činioca čija je razlika 5, a proizvod 50: $50 = 10 \cdot 5, \quad 10 - 5 = 5$ $\implies$ $n = \mathbf{10}$ (desetougao).

Teži zadatak 2

Ako se broj stranica mnogougla **poveća za 3**, broj dijagonala se poveća za **21**. Odredi taj mnogougao.

Teži zadatak 2

Ako se broj stranica mnogougla **poveća za 3**, broj dijagonala se poveća za **21**. Odredi taj mnogougao.

$$\frac{(n+3)n}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 21 \;\Rightarrow\; \frac{n^2+3n-n^2+3n}{2} = 21 \;\Rightarrow\; 3n = 21$$

$n = \mathbf{7}$ (sedmougao). Provjera: $D_{10} - D_7 = 35 - 14 = 21$ ✓

Teži zadatak 3

Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla je za 140° veći od spoljašnjeg.
Koliko **dijagonala** ima taj mnogougao?

Teži zadatak 3

Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla je za $\mathbf{140}^\circ$ veći od spoljašnjeg. Koliko **dijagonala** ima taj mnogougao?

$\alpha - \alpha_1 = 140^\circ$ i $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 160^\circ, \quad \alpha_1 = 20^\circ$

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha_1} = \frac{360^\circ}{20^\circ} = 18 \qquad D_{18} = \frac{18 \cdot 15}{2} = \mathbf{135}$$

Teži zadatak 4

Odnos unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla pravilnog mnogougla je $\mathbf{7} : \mathbf{2}$. Odredi broj stranica, broj dijagonala i zbir unutrašnjih uglova.

Teži zadatak 4

Odnos unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla pravilnog mnogougla je $\mathbf{7:2}$. Odredi broj stranica, broj dijagonala i zbir unutrašnjih uglova.

$\alpha = 7k$, $\alpha_1 = 2k$, $\quad 9k = 180^\circ \Rightarrow k = 20^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 140^\circ$, $\alpha_1 = 40^\circ$

$$n = \frac{360^\circ}{40^\circ} = \mathbf{9}, \qquad D_9 = \frac{9 \cdot 6}{2} = \mathbf{27}, \qquad S_9 = 7 \cdot 180^\circ = \mathbf{1260}^\circ$$

Teži zadatak 5

Sve dijagonale povučene iz jednog tjemena dijele mnogougao na **15 trouglova**. Koliko ukupno dijagonala ima taj mnogougao i koliki je zbir njegovih unutrašnjih uglova?

Teži zadatak 5

Sve dijagonale povučene iz jednog tjemena dijele mnogougao na **15 trouglova**. Koliko ukupno dijagonala ima taj mnogougao i koliki je zbir njegovih unutrašnjih uglova?

Broj trouglova je $n-2$, pa je $n-2=15 \Rightarrow n=\mathbf{17}$.

$$D_{17}=\frac{17\cdot 14}{2}=\mathbf{119}, \qquad S_{17}=15\cdot 180^\circ=\mathbf{2700}^\circ$$

Teži zadatak 6

Zbir svih unutrašnjih i svih spoljašnjih uglova nekog mnogougla je $\mathbf{2340}^\circ$. Odredi broj njegovih dijagonala.

Teži zadatak 6

Zbir svih unutrašnjih i svih spoljašnjih uglova nekog mnogougla je $\mathbf{2340}^\circ$. Odredi broj njegovih dijagonala.

Zbir spoljašnjih uglova je uvijek 360°, pa je

$$(n-2)\cdot 180^\circ + 360^\circ = 2340^\circ \;\Rightarrow\; (n-2)\cdot 180^\circ = 1980^\circ \;\Rightarrow\; n = \mathbf{13}$$

$$D_{13} = \frac{13\cdot 10}{2} = \mathbf{65}$$

Teži zadatak 7

Zbir unutrašnjih uglova mnogougla je **6 puta veći** od zbira njegovih spoljašnjih uglova. Koliko dijagonala ima taj mnogougao?

Teži zadatak 7

Zbir unutrašnjih uglova mnogougla je **6 puta veći** od zbira njegovih spoljašnjih uglova. Koliko dijagonala ima taj mnogougao?

$$(n-2)\cdot 180^\circ = 6\cdot 360^\circ = 2160^\circ \;\Rightarrow\; n-2=12 \;\Rightarrow\; n=\mathbf{14}$$

$$D_{14} = \frac{14\cdot 11}{2} = \mathbf{77}$$